＝＝

【解答】

1　（１）$-240\sqrt{2}$　（２）$p=2$（３）$y=-\frac{11}{7}x+\frac{68}{7}$（４）$\frac{845}{5832}$

2　（１）$x=\frac{5\sqrt{2}}{4}$，$y=\frac{5\sqrt{2}}{4}$　（記述の解答例は，解説をご参照ください。）

（２）①（解答例は，解説をご参照ください。）　②　AB＝3

3　（１）70758　（２）（解答例は，解説をご参照ください。）　（３）$ab-a-b$

4　（１）$\frac{m}{2}$　（２）$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$（３）$a=\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{6}$

5　（１）$0<a\leqq 9\sqrt{2}$（２）$h=9+\sqrt{81-\frac{1}{2}a^2}$（３）$V=288$，576

＝＝

【配点】

1　　各5点　小計 20点

2　　各７点　小計 21点

3　（１）６点　（２）・（３）７点　小計 20点

4　（１）６点　（２）・（３）７点　小計 20点

5　（１）・（２）６点　（３）７点　小計 19点

合計 100点

＝＝

【解説】

$\boxed{1}$ 小問集合

（１）　$(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})^3-(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2\{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})\}$

$=\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2\}^2\times(-4\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{15})^2\times(-4\sqrt{2})$

$=\mathbf{-240\sqrt{2}}$

（２）　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=p$である。3 以上の素数pは奇数であるから$x+y=p$，$x-y=1$ となるx，yが存在する。唯一残った素数 2 について考える。$x+y$，$x-y$は 2 の約数であり，$x+y\geqq 2$ であるから$x+y=2$(このとき，$x=y=1$)だが，$(x+y)(x-y)=2\times 0=0$ であるから，2 は問題の条件を満たす。ゆえに$\boldsymbol{p=2}$

（３）　AB＝AC となるので，直線 AO は BC を垂直に二等分する。よって直線 ℓ は直線 BC に平行である。直線 BC の傾きは$-\dfrac{11}{7}$であるのでこれと点 A の座標から求める式は$\boldsymbol{y=-\dfrac{11}{7}x+\dfrac{68}{7}}$とわかる。

（４）　操作が終了するごとにカードを戻すので，次の操作を行う確率・次の操作を行わなくなる確率は常に一定である。

(次の操作を行わなくなる確率)$=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{18}$

(次の操作を行う確率)＝1－(次の操作を行わなくなる確率)$=1-\dfrac{5}{18}=\dfrac{13}{18}$

であるから(求める確率)$=\dfrac{13}{18}\times\dfrac{13}{18}\times\dfrac{5}{18}=\boldsymbol{\dfrac{845}{5832}}$

$\boxed{2}$ 中問集合

（１）　【解説兼記述の解答例】

$$\begin{cases} 3x^2+5y^2=25\cdots① \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\cdots② \end{cases}$$
とする。

②の両辺にxyをかけて　$x^2+y^2=2xy$　よって$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=0$　であり，$x=y$　とわかる。

これと①より $8x^2=25$　$x^2=\dfrac{25}{8}$　$x>0$ より，$x=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$　同様に$y=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$　$\boldsymbol{x=\dfrac{5\sqrt{2}}{4},\ y=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}}$

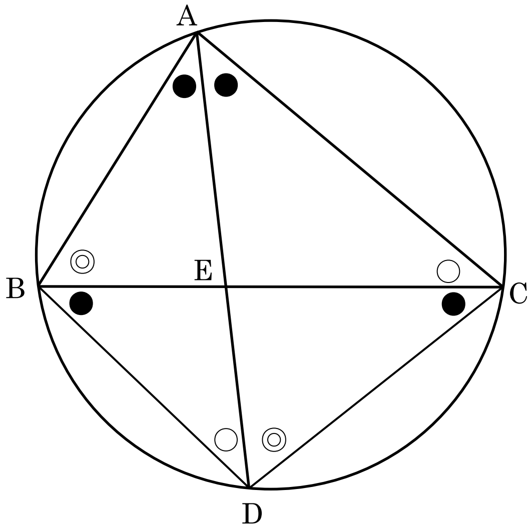
（２）　①　【解説兼証明の解答例】

BE＝x，AE＝yとする。

方べきの定理より BE×EC＝AE×BD であるから，これと仮定より$x^2=y\times(2x-y)$

したがって$x^2=2xy-y^2$ 移項して$x^2-2xy+y^2=0$　ゆえに$(x-y)^2=0$　つまり$x=y$であるから，
BE＝EC＝AE＝BD である。対角線がそれぞれの中点で交わり，かつ対角線の長さが等しいことから
四角形 ABCD は長方形である。よって∠BAD＝45°である。これと円周角の定理・錯角から
∠BAD＝∠BCD＝∠ADC＝45°よって∠CED＝90°であり，対角線が垂直に交わるとわかる。
対角線が垂直に交わる長方形は正方形であるから，四角形 ABDC は正方形である。【証明終わり】

② ∠BAD＝●，∠ABC＝◎，∠ACB＝○で表し，円周角の定理を用いて下のように整理した。



これより，BD＝CD＝3 がわかる。
等しい弦の長さに対する円周角は等しいので，●＝◎，●＝○のいずれかであるが，AC＝4 であるので，●≠◎であるから，●＝○である。つまり，BD と AB の長さは等しい。ゆえに **AB＝3**

3　整数

（１）$n+12$ が 7 の倍数で，$n+12$ が 5 の倍数であるとわかる。したがって$n+12$ は 5 と 7 の最小公倍数である 35 の倍数である。よって，小さいほうから 2022 番目のものは，35×2022－12＝**70758** である。

（２）

（過程）

$n+2021$ は 2022 の倍数であるから，kを自然数として，$n+2021=2022k$…①とおける。

同様にmを自然数として，$n+2022=2021m$…②とおける。

①の両辺に 2022，②の両辺に 2021 をたして

$n+4043=2022k+2022=2022(k+1)$…③，$n+4043=2021m+2021=2021(m+1)$…④

ゆえに　$n+4043=2022(k+1)=2021(m+1)$…④

（注：ここから解答例）

2021 と 2022 は互いに素であるから，$n+4043$ は 2021 と 2022 の最小公倍数の倍数，

つまり 4086462 の倍数である。4086462＞4043 より，最小のものは 4086462－4043＝4082419

求めるものは小さいほうから 3 番目のものであるから，4086462×3－4043＝12259386－4043＝12255343

（３）（２）の方法を用いる。

$n+a$はbの倍数であるから，kを自然数として，$n+a=bk$…①とおける。

同様にmを自然数として，$n+b=am$…②とおける。

①の両辺にb，②の両辺にaをたして

$n+a+b=bk+b=b(k+1)$…③，$n+a+b=am+a=a(m+1)$…④

ゆえに　$n+a+b=b(k+1)=a(m+1)$…④

　aとbは互いに素であるから，$n+4043$はaとbの最小公倍数の倍数，

つまりabの倍数である。$ab>a+b$(※)より，最小のものは$\boldsymbol{ab-a-b}$

(※)の証明

aとbは2以上の整数で互いに素であるから，$a\neq b$。

$a<b$とすると $ab\geqq 2b=b+b>a+b$　であるから，$ab>a+b$

$a>b$のときも同様であるから，確かにこの不等式が成り立つ。【証明終わり】

4　放物線と図形

（1）　直線 BP と直線 AH の交点を点 Q とする。

三角形の相似から BC：CA＝BO：OH。ここで，△ABH にチェバの定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OH}}\times\dfrac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{QA}}\times\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}=1$ であるから　$\dfrac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{QA}}=1$

ゆえに，点Qは線分 AH の中点であり，直線 BP の傾きは$\dfrac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}$と分かる。

（2）点 A のx座標を t とする(t＞0)。△BHQ において三平方の定理より $\mathrm{BQ}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{HQ}^2$

$\{m(t+1)\}^2=(t+1)^2+\{\dfrac{m}{2}(t+1)\}^2$

$m^2(t+1)^2=(t+1)^2+\dfrac{m^2}{4}(t+1)^2$

$\left(\dfrac{3m^2}{4}-1\right)(t+1)^2=0$

$t+1\neq 0$ であるから，$(t+1)^2\neq 0$ であり，$\dfrac{3m^2}{4}-1=0$　$m^2=\dfrac{4}{3}$　$m>0$ より$m=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

（3）　点 A の座標を，$(t,\ at^2)$とおく。以降，AC＝AH＞0 であることを踏まえて解説する。

三平方の定理より，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$

$$=\{\frac{2\sqrt{3}}{3}(t+1)\}^2+(t+1)^2$$

$$=\frac{4}{3}(t+1)^2+(t+1)^2=\frac{7}{3}(t+1)^2$$

三角形の相似から，$\mathrm{AC}^2=\dfrac{7}{3}(t+1)^2\times\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$

$$=\frac{7}{3}t^2\cdots①$$

$AH^2=\frac{4}{3}(t+1)^2=\frac{4}{3}t^2+\frac{8}{3}t+\frac{4}{3}$…②

①と②は等しいので$\frac{7}{3}t^2=\frac{4}{3}t^2+\frac{8}{3}t+\frac{4}{3}$　ゆえに$t^2-\frac{8}{3}t-\frac{4}{3}=0$　これを解いて

$t=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$　$t>0$であるから$t=\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$

$AH=\frac{2\sqrt{3}}{3}(t+1)=at^2$であるから

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{7+2\sqrt{7}}{3}=\frac{14\sqrt{3}+4\sqrt{21}}{9}=a\times\left(\frac{4+2\sqrt{7}}{3}\right)^2$

$a\times\frac{44+16\sqrt{7}}{9}=\frac{14\sqrt{3}+4\sqrt{21}}{9}$

$a=\frac{14\sqrt{3}+4\sqrt{21}}{9}\times\frac{9}{44+16\sqrt{7}}$

$=\frac{14\sqrt{3}+4\sqrt{21}}{9}\times\frac{396-144\sqrt{7}}{144}$

$=\frac{14\sqrt{3}+4\sqrt{21}}{9}\times\frac{11-4\sqrt{7}}{4}$

$=\frac{154\sqrt{3}+44\sqrt{21}-56\sqrt{21}-112\sqrt{3}}{36}$

$=\frac{42\sqrt{3}-12\sqrt{21}}{36}=\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{6}$　ゆえに，$\boldsymbol{a=\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{6}}$

5　空間図形

（1）　aの値が最大になるのはACとBDが円の直径となるとき，つまりAC＝BD＝18となるときである。このとき$a=18\times\frac{1}{\sqrt{2}}=9\sqrt{2}$。また$a$は正の数であるから$\boldsymbol{0<a\leqq9\sqrt{2}}$

（2）　球の中心をO′，正方形ABCDの対角線の交点をPとする。O，O′，Pは同一直線状にあるが，O′とPが一致する場合は1通り，一致しない場合は2通りのhの値が考えられる。(Oの位置が2つ考えられるため。)求めるものはOとPの距離である。一致する場合は9である。一致しない場合，たとえば直角三角形AO′Pを考え，三平方の定理より$(AO')^2=(O'P)^2+(AP)^2$であるから$9^2=(O'P)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2$。これとO′P＞0よりO′P$=\sqrt{81-\frac{1}{2}a^2}$とわかる。求めるものは最も大きいものであるから$\boldsymbol{h=9+\sqrt{81-\frac{1}{2}a^2}}$である。（これは，一致する場合にも成り立つ。）

（3）　$V=\frac{1}{3}a^2\times\left(9\pm\sqrt{81-\frac{1}{2}a^2}\right)=3a^2\pm\frac{1}{3}a^2\sqrt{81-\frac{1}{2}a^2}=\left(3\pm\frac{1}{3}\sqrt{81-\frac{1}{2}a^2}\right)a^2$

（1）より $0<a\leqq 9\sqrt{2}$ であり，$12<9\sqrt{2}<13$ であるから，aに 1 から 12 までの整数を代入して確かめればよい。すると，$a=12$ のとき，$\left(3\pm\frac{1}{3}\sqrt{81-72}\right)\times 144=(3\pm 1)\times 144$ となるので$V=288$，576

これ以外のときには条件を満たさないので，$V=$**288，576**